Title	\$SL(3,mathbb{R})\$及び\$SU(2,1)\$の固有な作用を持たない半単純対称空間の例について (表現論および表現論の関連する諸分野の発展)
Author(s)	奥田, 隆幸
Citation	数理解析研究所講究録 (2014), 1877: 152-157
Issue Date	2014-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/195583
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1877 巻 2014 年 152-157

$SL(3,\mathbb{R})$ 及び $SU(2,1)$ の固有な作用を持たない半単純対称空間の例について

東北大学大学院情報科学研究科 奥田隆幸 *
Takayuki Okuda
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

1 序

G を単純 Lie 群, (G, H) を対称対とする. また, Lie 環 $\mathfrak{l}$ を一つ固定する. 本報告では, 「G の簡約型部分群 L で, $\mathrm{Lie}\, L \simeq \mathfrak{l}$ であって, なおかつ対称空間 G/H への作用が固有になるものは存在するか?」という問題を考えたい.

$\mathfrak{l}$ として一次元の可換 Lie 環を考える場合には, 上記のような L の存在と $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\, \mathfrak{g} > \mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\, \mathfrak{h}$ となることは同値である (小林俊行 [2]). また, $\mathfrak{l} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ とした場合には, 上記のような L が存在する対称対 (G, H) は分類が完了している (奥田 [3]). 本報告では, $\mathfrak{l}$ として $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ または $\mathfrak{su}(2,1)$ を含む半単純 Lie 環を考えたとき, 特殊な冪零軌道のペアを考えることによりいくつかの候補が削れることを報告したい.

2 主結果

G を連結線形単純 Lie 群, (G, H) を対称対とする. また, G, H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ と書く.

抽象的に与えられた Lie 群 L に対して, Lie 群の準同型 $\rho: L \to G$ であって, 対称空間 G/H 上の ρ の誘導する L-作用が固有であるようなものが存在するとき, 対称空間 G/H は L の固有な作用を許容するということにする.

本報告の主結果は以下のものである:

*okuda@ims.is.tohoku.ac.jp

Theorem 2.1. 対称対 (G,H) に対して, 対応する *Lie* 環の対称対 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ が以下の *Table 1* のリストのいずれかと同型であるとする. このとき, G/H が線形連結単純 *Lie* 群 L の固有な作用を許容するなら, L の *Lie* 環は $\mathfrak{so}(n,1)$ $(n \geq 2)$, $\mathfrak{so}(3,2)$, $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$ のいずれかと同型でなければならない.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$
$\mathfrak{sl}(2k,\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(k+1,k-1)$
$\mathfrak{su}^*(4m+2)$	$\mathfrak{sp}(m+2,m-1)$
$\mathfrak{su}(k,k)$	$\mathfrak{su}(k-i,k-1-i) \oplus \mathfrak{su}(i,i+1) \oplus \mathfrak{so}(2) \quad (0 \leq i < k-1)$
$\mathfrak{so}(k+1,k)$	$\mathfrak{so}(k+1-i,k-1-i) \oplus \mathfrak{so}(i,i+1) \quad (0 \leq i < k)$
$\mathfrak{so}(4m+3,4m+2)$	$\mathfrak{so}(4m+3-i,4m-i) \oplus \mathfrak{so}(i,i+2) \quad (0 \leq i \leq 4m)$
$\mathfrak{so}(4m+4,4m+1)$	$\mathfrak{so}(4m+4-i,4m-i) \oplus \mathfrak{so}(i,i+1) \quad (0 \leq i \leq 4m)$
$\mathfrak{sp}(2k+1,\mathbb{R})$	$\mathfrak{su}(k+1,k) \oplus \mathfrak{so}(2)$
$\mathfrak{sp}(2k,\mathbb{R})$	$\mathfrak{su}(k+1,k-1) \oplus \mathfrak{so}(2)$
$\mathfrak{sp}(2k,\mathbb{R})$	$\mathfrak{su}(k,k) \oplus \mathfrak{so}(2)$
$\mathfrak{sp}(2k,\mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(k,\mathbb{C})$
$\mathfrak{sp}(k,k)$	$\mathfrak{sp}(k-i,k-1-i) \oplus \mathfrak{sp}(i,i+1) \quad (0 \leq i < k-1)$
$\mathfrak{so}(2m,2m)$	$\mathfrak{so}(2m-i,2m-1-i) \oplus \mathfrak{so}(i,i+1) \quad (0 \leq i < 2m)$
$\mathfrak{so}^*(4m)$	$\mathfrak{su}(m+1,m-1) \oplus \mathfrak{so}(2)$
$\mathfrak{so}^*(4m)$	$\mathfrak{so}^*(4m-4i-2) \oplus \mathfrak{so}^*(4i+2) \quad (0 \leq i < m)$
$\mathfrak{so}^*(4m+2)$	$\mathfrak{su}(m+2,m-1) \oplus \mathfrak{so}(2)$
$\mathfrak{e}_{7(7)}$	$\mathfrak{e}_{6(2)} \oplus \mathfrak{so}(2)$
$\mathfrak{e}_{7(7)}$	$\mathfrak{su}(4,4)$
$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{e}_{6(-14)} \oplus \mathfrak{so}(2)$
$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{su}(6,2)$
$\mathfrak{so}(4m,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(p,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(4m-p,\mathbb{C}) \quad (p \text{ is odd})$
$\mathfrak{sl}(2k,\mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(k+1,k-1)$
$\mathfrak{so}(2k+1,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(k+2,k-1)$
$\mathfrak{sp}(2k+1,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(k+1,k)$
$\mathfrak{sp}(2k,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(k,k)$
$\mathfrak{sp}(2k,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(k+1,k-1)$
$\mathfrak{so}(4m,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2m+1,2m-1)$
$\mathfrak{e}_{7,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{e}_{7(-5)}$

Table 1: $SL(3,\mathbb{R})$ 及び $SU(2,1)$ の固有な作用を許容しない対称対の例

ここで, 単純 Lie 環 $\mathfrak{l}$ が上記のいずれかと同型であることと, $\mathfrak{l}$ が部分 Lie 環として $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ か $\mathfrak{su}(2,1)$ のいずれかを含むことは同値である (see Proposition 3.4). また, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{so}(2,1)$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}(3,1)$, $\mathfrak{sp}(1,1) \simeq \mathfrak{so}(4,1)$, $\mathfrak{su}^*(4) \simeq \mathfrak{so}(5,1)$ であることを注意しておく.

Remark 2.2. *Theorem 2.1 の Table 1 に登場する対称対* $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *は, すべて [3, Table 6 in Appendix A] に登場するものである. ここで, 対称対* $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *が [3, Table 6 in Appendix A] のリストのいずれかと同型あることと, 対称空間* G/H *が* $SL(2,\mathbb{R})$ *と局所同型な Lie 群の固有な作用を許容することは同値である. 従って,* $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *が Table 1 に現れるもののいずれかと同型であるとき,* G/H *は* $SL(2,\mathbb{R})$ *と局所同型な Lie 群の固有な作用を許容するが,* $SL(3,\mathbb{R})$ *や* $SU(2,1)$ *と局所同型な Lie 群の固有な作用は許容しない.*

3 証明の方針

本章で Theorem 2.1 の証明の方針を述べる.

G を連結線形半単純 Lie 群, (G,H) を対称対とする. G, H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ と書き, $\mathfrak{g}$ の複素化を $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ と置く. 対称対 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対応する $\mathfrak{g}$ の分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$$

と置き, 対称対 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の c-dual $\mathfrak{g}^c$ を

$$\mathfrak{g}^c := \mathfrak{h} + \sqrt{-1}\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$$

と定義しておく. このとき, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^c$ は共に $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の実形であることに注意しておく.

以下のように複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の随伴軌道の各種集合を定義しよう.

- $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) := \{\, A \in \mathfrak{g}_\mathbb{C} \mid \text{There exist } X, Y \in \mathfrak{g}_\mathbb{C} \text{ s.t. } (A,X,Y) : \mathfrak{sl}_2\text{-triple} \,\}/\operatorname{Int}\mathfrak{g}_\mathbb{C}$,
- $\mathcal{S}^\star(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) := \{\, \mathcal{O} \in \mathcal{S} \mid \frac{1}{2}\mathcal{O} \text{ is also in } \mathcal{S} \,\}$,
- $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) := \{\, \mathcal{O} \in \mathcal{S} \mid \mathcal{O} \cap \mathfrak{g}' \neq \emptyset \,\}$ for each (real) subalgebra $\mathfrak{g}'$ of $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$,
- $\mathcal{S}^\star_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) := \mathcal{S}^\star(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \cap \mathcal{S}_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ for each (real) subalgebra $\mathfrak{g}'$ of $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$.

Remark 3.1. *Jacobson–Morozov, Kostant, Malcev* らの結果から $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ と $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 内の随伴冪零軌道の集合は自然に一体一対応する (*cf. [1]*). 従って, $\mathcal{S}^{\star}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ は冪零軌道の中で, ある意味における "2 倍" の関係にあるペアを考えていることになる.

このとき, 次の Theorem が成り立つ:

Theorem 3.2. 対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が

$$\mathcal{S}^{\star}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \subset \mathcal{S}^{\star}_{\mathfrak{g}^c}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \tag{1}$$

という条件を満たすとしよう. このとき, G の半単純簡約型部分群 L で 対称空間 G/H への作用が固有であるものを考えると, L の *Lie* 環 $\mathfrak{l}$ は

$$\mathcal{S}^{\star}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}) = \{[0]\} \tag{2}$$

でなければならない (ただしここで $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{l}$ の複素化とし, $[0]$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 内の零軌道としている).

Theorem 3.2 の証明は次の節で述べる. Theorem 2.1 は Theorem 3.2 と以下の二つの分類結果から従う.

Proposition 3.3. $\mathfrak{g}$ が単純 *Lie* 環で $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が対称対であるとき, 以下の条件は同値:

(*i*) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は *Theorem 3.2* の条件 (1) を満たし, なおかつ $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}} \not\subset \mathcal{S}_{\mathfrak{g}^c}$ である (後半の条件の意味については *Remark 3.5* を参照).

(*ii*) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は *Table 1* のリストのうちいずれかと同型である.

Proposition 3.4. 単純 *Lie* 環 $\mathfrak{l}$ に対して以下の条件は同値:

(*i*) $\mathfrak{l}$ は *Theorem 3.2* における条件 (2) を満たす.

(*ii*) $\mathfrak{l}$ は $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ または $\mathfrak{su}(2, 1)$ を部分 *Lie* 環として含まない.

(*iii*) $\mathfrak{l}$ は $\mathfrak{so}(n, 1)$ $(n \geq 2)$, $\mathfrak{so}(3, 2)$, $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$ のいずれかと同型である.

Proposition 3.3, 3.4 は複素冪零軌道の重み付き Dynkin 図形を用いた分類 (Dynkin–Kostant classifications) と, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^c$ の佐武図形を用いて証明するが, この報告では詳細は省略する.

Remark 3.5. *Theorem 3.2* では $\mathcal{S}^\star_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ という特殊な関係の冪零軌道のペアに注目することで固有な作用の非存在について論じているが, 報告者は冪零軌道に注目した形で $SL(2,\mathbb{R})$ と局所同型な群の固有な作用の存在・非存在について次の定理を示した (*[3]*): 対称対 (G,H) に対して次の条件は同値:

(*i*) G の簡約型部分群 L であって, $\mathrm{Lie}\,L \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ であり, G/H への作用が固有であるものが存在しない.

(*ii*) $\mathcal{S}_\mathfrak{g} \subset \mathcal{S}_{\mathfrak{g}^c}$.

また, 上記の同値な条件を満たす対称対の分類も同論文で行った.

4 Theorem 3.2 の証明

まず [2, Theorem 4.1] と [3, Proposition 4.6] の帰結として次の命題が従う:

Proposition 4.1. G を線形連結半単純 *Lie* 群, (G,H) を対称対とし, L を G の簡約型部分群とする. このとき, (G,H,L) についての次の条件は同値:

(*i*) L の G/H への作用は固有でない.

(*ii*) $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の非零な双曲的軌道 $\mathcal{O}$ であって, $\mathfrak{l}$ と $\mathfrak{g}^c$ の両方とも交わるものが存在する.

ただし $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の随伴軌道 $\mathcal{O}$ が双曲的であるとは, $\mathcal{O}$ の任意の元 X に対して線形作用素 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}} X \in \mathrm{End}_\mathbb{C}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ が対角化可能で固有値が全て実であることをいう.

また, $\mathcal{S}^\star(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の定義から, ただちに次の補題が従う:

Lemma 4.2. 複素 *Lie* 環の準同型 $\rho_\mathbb{C} : \mathfrak{l}_\mathbb{C} \to \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ を考えたとき, $\rho_\mathbb{C}$ は自然に $\mathcal{S}(\mathfrak{l}_\mathbb{C})$ から $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ への写像 $\rho^*_\mathbb{C}$ を誘導するが, このとき $\rho^*_\mathbb{C}(\mathcal{S}^\star(\mathfrak{l}_\mathbb{C})) \subset \mathcal{S}^\star(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$.

これらの Proposition, Lemma を用いて Theorem 3.2 を証明しよう.

Theorem 3.2 の証明. 対称対 (G,H) に対して $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ が $\mathcal{S}^\star_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \subset \mathcal{S}^\star_{\mathfrak{g}^c}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ という条件を満たしていて, 連結線形半単純 Lie 群 L に対して $\mathfrak{l}$ が $\mathcal{S}^\star_\mathfrak{l}(\mathfrak{l}_\mathbb{C}) \neq \{[0]\}$ であるとする. Lie 群の埋込み $\rho : L \to G$ を固定したとき, , その微分 $\rho : \mathfrak{l} \to \mathfrak{g}$ も同じ記号を用いることにする. Lemma 4.2 と $\mathcal{S}^\star_\mathfrak{l}(\mathfrak{l}_\mathbb{C}) \neq \{[0]\}$ という仮定から, $\mathcal{S}^\star_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の非零な軌道 $\mathcal{O}$ であって, $\rho(\mathfrak{l})$ と交わるものが存在する. いま, $\mathcal{S}^\star_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \subset \mathcal{S}^\star_{\mathfrak{g}^c}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ であったから, $\mathcal{O}$ は $\mathfrak{g}^c$ とも交わる. 全ての $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の軌道は双曲的である ($\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現論) から, Proposition 4.1 と併せて主張が従う. □

References

[1] David H. Collingwood and William M. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold Mathematics Series, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.

[2] Toshiyuki Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. **285** (1989), 249–263.

[3] Takayuki Okuda, *Classification of semisimple symmetric spaces with proper* $SL(2,\mathbb{R})$*-actions*, J. Differential Geom. **94** (2013), 301–342.